Святсков В.А. Уравнение Эйлера–Лагранжа в пограничном слое и его приложения: монография. – 2-е изд., исправ. – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2008. – 135с. ISBN 978-5-902891-47-5.

I. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

1. Первоначальное знакомство с уравнением Эйлера-Лагранжа для пограничного слоя.

$$[\sigma + g(x, y, \dot{y})]\,\ddot{y} \; + \; a(x, y, \dot{y}) = b(x) \quad . \qquad \text{(I.1)}$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \qquad \text{(I.2)}$$

В начальной задаче (задаче Коши) (I.1), (I.2) введены следующие обозначения:

$\sigma \geq 0$ - некоторый заданный параметр;

x – независимая переменная (аргумент) функции *y=y(x)*, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$;

$g(x, y, \dot{y})$, $a(x, y, \dot{y})$, $b(x)$ - некоторые заданные полиномы степени не выше третьей от своих аргументов со следующим свойством:

при *x=0*

$$g(0, 0, 0) = a(0, 0, 0) = 0 \; ; \qquad \text{(I.3)}$$

полином $b(x)$ в общем случае

$$b(0) \neq 0 \qquad \text{(I.4)}$$

2. Некоторые основные свойства начальной задачи.

При $\sigma = 0$ из уравнения (I.1) получим

$$g(x, y, \dot{y})\ddot{y} \; + \; a(x, y, \dot{y}) = b(x) \quad . \qquad \text{(I.5)}$$

Из формул (I.1), (I.5) следует, что уравнение (I.5) является по своей сути предельным уравнением для уравнения (I.1).

Начальная задача (I.5), (I.2) может иметь особую точку в своем решении *y=y(x)*. Это связано с нулевыми ограничениями (I.2), (I.3) и условием (I.4). Чтобы удовлетворить выражению (I.4) для решения *y=y(x)* должно выполняться условие

$$\lim_{x \to 0} \ddot{y}(x) = \infty \quad , \qquad \text{(I.6)}$$

что означает

$$g(x, y, \dot{y}) = O[x^{\alpha}], \quad \ddot{y}(x) = O[x^{-\beta}] \quad \text{при } x \to 0 \text{ и } \alpha \geq \beta > 0 \qquad \text{(I.7)}$$

Если в задаче (I.1), (I.2) σ малый параметр, то эта задача имеет характер сингулярно возмущенной со следующим свойством: при малом параметре $\sigma=0$, порядок уравнения (I.1) не понижается, само уравнение (I.5) приобретает особую точку. Такой класс уравнений ввел в рассмотрение С.А. Ломов и сейчас активно исследуется его учениками.

3. Принятые обозначения для основного уравнения.

1°. Э-Л – уравнение Эйлера-Лагранжа для пограничного слоя (I.1), в тексте оно часто еще называется основным уравнением.

2°.
$$\{x, y, \dot{y}\} = \{t, x, \dot{x}\} = \{t, \tilde{u}, \dot{\tilde{u}}\} \tag{I.8}$$

Первое из обозначений (I.8) принято в математическом исследовании моего проекта, второе – касается проблем связанных с прикладной механикой, третье – связано с постановкой и решением вариационных задач, а также – с теорией оптимальных аэродинамических форм (ТОАФ). Эти обозначения касаются функций g, a , входящих в формулу (I.1), а также функции c , которая входит в функцию g . От этих же переменных зависят исследуемые лагранжианы (интегранты) $L, L_{\Delta}, F_{\Delta}$.

II. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ОБОБЩЕННОГО СТЕПЕННОГО РЯДА.

1. Примеры.

1°. Задача ТОАФ.

Рассмотрим задачу об определении оптимальной формы осесимметричного тела в гиперзвуковом невязком потоке газа при заданном радиусе донного сечения r и объеме тела V.

Лагранжиан исследуемой задачи имеет вид

$$L(u, \dot{u}) = \frac{u\,\dot{u}^3}{1+\varepsilon^2\,\dot{u}^2} + \rho\,u^2 \quad ,$$

где ρ – множитель Лагранжа, ε - относительная толщина тела. В соответствии с методом работы в окрестности носовой части $(\{t, u, \dot{u}\} = \{0,0,0\})$ лагранжиан приводится к виду

$$L_{\Delta}(\tilde{u}, \dot{\tilde{u}}) = \tilde{u}\,\dot{\tilde{u}}^3 + \rho\,\tilde{u}^2 \quad .$$

Экстремаль определяется как решение задачи Коши (I.5), (I.2)

$$\begin{aligned} &3\tilde{u}\,\dot{\tilde{u}}\,\ddot{\tilde{u}} + \dot{\tilde{u}}^3 - \rho\,\tilde{u} = 0 \;, \\ &\tilde{u}(0) = 0, \dot{\tilde{u}}(0) = 0. \end{aligned} \tag{II.1}$$

В этой задаче

$$g(t,\tilde{u},\dot{\tilde{u}}) = 3\tilde{u}\,\dot{\tilde{u}}, \quad a(t,\tilde{u},\dot{\tilde{u}}) = \dot{\tilde{u}}^3 - \rho\,\tilde{u}, \quad b(t) \equiv 0 \tag{II.2}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\tilde{u} = \frac{2\rho^{1/2}}{3^{3/2}} t^{3/2} \quad . \tag{II.3}$$

2°. Задача о брахистохроне.

В первом интеграле уравнения Эйлера – Лагранжа этой классической задачи курса вариационного исчисления поменяем местами x и y:

$$(2a - x)\dot{y}^2 = x. \tag{II.4}$$

Экстремаль определяется как решение задачи Коши (I.5), (I.2)

$$(4a\dot{y} - 2x\dot{y})\ddot{y} - \dot{y}^2 = 1 \tag{II.5}$$

В этой задаче

$$g(x,y,\dot{y}) = 4a\,\dot{y} - 2x\,\dot{y}; \quad a(x,y,\dot{y}) = -\dot{y}^2; \quad b(x) = 1 \tag{II.6}$$

Решение задачи Коши (II.5), (I.2), или, (II.4) при условии *y(0)=0* :

$$y = x^{3/2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \tag{II.7}$$

где

$$b_i = \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}+i}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{2}+i}a^{\frac{1}{2}+i}}, \quad i = 0,1,2,... \tag{II.8}$$

Значения первых трех коэффициентов формулы (II.8):

$$b_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b_1 = \frac{1}{40}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad b_2 = \frac{3}{896}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{II.9}$$

3°. Динамика точки переменной массы.

На этой задаче наглядно виден подход, применяемый в предлагаемом исследовании: интегрирование нелинейных ОДУ на основе обобщенных степенных рядов. Выбрана задача, решение которой можно найти в конечном виде для сравнения двух решений: конечного параметрического и решения в виде обобщенного степенного ряда.

Точка из состояния покоя начинает двигаться вдоль прямой под действием постоянной силы *F*. Закон нарастания массы точки выражается формулой $M = \mu v^2$, $\mu = const$. Абсолютная скорость налипающих частиц $q = const$. Найти закон движения точки.

Уравнение И.В. Мещерского для этой задачи имеет вид

$$\frac{d}{dt}[M(v-q)] = F \; . \qquad \text{(II.10)}$$

В соответствии с основными обозначениями введем параметры:

$$M_1 = F, K_2 = 6\mu, K_1 = -2\mu q,$$

а также обозначения:

$$m_1 = M_1 / K_1, k_2 = K_2 / K_1.$$

Исходя из уравнения (I.1), будем иметь следующую начальную задачу:

$$(K_1\dot{x} + \frac{1}{2}K_2\dot{x}^2)\ddot{x} = M_1; \qquad \text{(II.11)}$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0;$$

$$\operatorname{sgn} K_1 = \operatorname{sgn} M_1;$$

$$K_1 \neq 0, K_2 \neq 0, M_1 \neq 0, K_1, K_2, M_1 \in \mathbf{R};$$

$$x \in \mathbf{C}^2\ ((0,1], \mathbf{R}).$$

В этой задаче

$$g(t,x,\dot{x}) = K_1\,\dot{x} + \frac{1}{2}K_2\,\dot{x}^2; \quad a(t,x,\dot{x}) \equiv 0; \quad b(t) = M_1 \qquad \text{(II.12)}$$

Эта задача имеет следующее параметрическое решение:

$$x = \frac{1}{3}\frac{1}{m_1}\tau^3 + \frac{1}{8}\frac{k_2}{m_1}\tau^4, \qquad \text{(II.13)}$$

$$t = \frac{1}{2}\frac{1}{m_1}\tau^2 + \frac{1}{6}\frac{k_2}{m_1}\tau^3. \qquad \text{(II.14)}$$

Наглядно просматривается суть физического процесса из решения, полученного в виде обобщенного степенного ряда в окрестности точки (0,0,0) на основе теории ветвления:

$$x = t^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_i t^{\frac{i}{2}}, \qquad \text{(II.15)}$$

где коэффициенты $\tilde{u}_i$ вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\tilde{u}_i = f(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{i-1}) \quad .$$

В частности, если ограничиться только главным членом разложения, то будем иметь

$$x \cong \pm \frac{2^{3/2}}{3} m_1^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(II.16)}$$

Из формулы (II.16) следует $\operatorname{sgn} K_1 = \operatorname{sgn} M_1$, что означает $\operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn} F$, т.е. в этой задаче частицы движутся навстречу исследуемой материальной точке.

Из формулы (II.16) также следует, что в окрестности точки (0,0,0) закон нарастания массы $M = \mu \dot{x}^2 \cong 2\mu m_1 t$ близок к линейному, а закон изменения кинетической энергии точки $K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \cong 2\mu m_1^2 t^2$ близок к квадратичному. Численные расчеты и графики, приведенные в главе IV, служат иллюстрацией этим фактам.

Заметим, что уравнение (II.11) является частным случаем общего предельного уравнения сингулярно возмущенной задачи главы I; решение (II.15) – частный случай решения, полученного в параграфе 2 главы II. Это решение получено на основе теоремы 2.1 о структуре решений исследуемого основного уравнения работы. В обозначениях настоящего исследования лагранжиан рассмотренной задачи имеет вид

$$L_\Delta(t, x, \dot{x}) = M_1 x + \frac{1}{6} K_1 \dot{x}^3 + \frac{1}{24} K_2 \dot{x}^4. \qquad \text{(II.17)}$$

2. <u>Выводы.</u>

Приведенные три задачи объединяют следующие результаты.

1°. Решения этих задач (II.3), (II.7), (II.15) получены из начальной задачи (I.5), (I.2) уравнения Эйлера – Лагранжа в качестве экстремалей.

2°. Эти решения в явном виде имеют вид обобщенного степенного ряда (II.15).

3°. Эти решения имеют особую точку в начальной точке со свойством (I.7).

4°. В силу свойства (I.7) получить аналитические решения на основе систем аналитических вычислений таких, как *Maple, MathCad,* в действительной области практически невозможно.

5°. Стандартные численные методы (Рунге-Кутта и т.д.) и процедуры (*RKF45* и т.д.) для решения задачи Коши в окрестности особой точки неприменимы

6°. Предложенный автором метод можно использовать при численном решении подобных задач в качестве разгона.

Пусть приняты первые обозначения из (I.8): $\{x, y, \dot{y}\}$ и заданы начальные условия (I.2). При $x \in \Delta, \quad \Delta = [0, \delta], \quad \delta << 1$ строим решение вида (II.19).

Из формулы (II.19) получим

$$y(\delta) = y_{\delta}, \quad \dot{y}(\delta) = \dot{y}_{\delta} \tag{II.18}$$

7°. Конечные значения (II.18) можно использовать в качестве начальных условий численного решения задачи Коши для уравнения (I.5).

3. Обобщенный степенной ряд.

Формально определим обобщенный степенной ряд (ряд Пюизё)

$$y = x^{p/q} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k/q}, \quad p, q \in N \tag{II.19}$$

В задачах (II.1)

$$y = x^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k/2} \ ; \quad p = 3 \ , \ \ q = 2 \ ; \quad b_k = f(b_0, b_1, ..., b_{k-1}) \tag{II.20}$$

III. ВВЕДЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.

1. Определение. *(Математическая энциклопедия, т.V)*

Пограничного слоя теория – асимптотическое приближение решения граничных задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (сингулярных задач) в подобластях с существенным влиянием членов со старшими производными на решение.

2. Применение.

Уравнение (I.1) – ОДУ второго порядка является существенно нелинейным. Из него нельзя получить, как частный случай, линейное даже при определенном подборе параметров. Существование особой точки связано с нарушением усиленного условия Лежандра. В зависимости от значения параметра σ возможно существование следующих типов задач.

1°. При конечном значении $\sigma>0$ это уравнение поддается исследованию классическими методами (аналитическими, численными и т.д.).

2°. Автором подробно исследован случай $\underline{\sigma=0}$. Задача Коши (I.5), (I.2) и ее решение имеют особую точку.

3°. При $\underline{0<\sigma<<1}$ это уравнение имеет характер сингулярно возмущенного со следующим свойством: при малом параметре равном нулю порядок уравнения не понижается, само уравнение становится с особой точкой.

Из процесса исследования автором затронутой проблемы можно сделать следующий вывод: окрестность особой точки формирует математический пограничный слой. В этом пограничном слое решение задач Коши при $\underline{0\le\sigma<<1}$ может быть представлено в виде ряда Пюизё (II.19).

IV. ПРИЛОЖЕНИЯ.

1. Математика.

1.1. Непрерывность.

1°. Вариационное исчисление.

2°. Связь с теорией сингулярно возмущенных задач.

3°. Плоские кривые с точкой возврата (брахистохрона, парабола Нейля и т.д.).

1.2. Дискретность.

1°. Гомоморфизм.

2°. Структура алгебры элементов уравнения Э-Л.

3°. Групповой анализ.

2. Прикладная механика.

2.1. Теоретическая механика.

1°. Прямолинейное движение тела переменной массы.

2°. Теорема об изменении кинетического момента механической системы с переменным моментом инерции.

2.2. Техника.

1°. Определение оптимальной формы тела в гиперзвуковом невязком потоке.

2°. Движение тела переменной массы в случае нулевых начальных условий.

3°. Вращательное движение твердого тела с переменным моментом инерции.

V. ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение

Э-Л – уравнение Эйлера – Лагранжа

ТОАФ – теория оптимальных аэродинамических форм

УУЛ – усиленное условие Лежандра

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$L = L(t, u, \dot{u})$ – лагранжиан;

$L_\Delta(t, \tilde{u}, \tilde{v})$, $F_\Delta(t, \tilde{u}, \tilde{v})$ – лагранжиан пограничного слоя;

$\dot{u}$ – производная по t;

Φ – функционал;

Ψ – экстремальное значение функционала;

$v = \dot{u}$;

L_u – производная по u;

L_v – производная по v;

t_0 – исследуемая точка;

$u_0 = u(t_0)$;

$v_0 = v(t_0)$;

$L^0 = L(t_0, u_0, v_0)$;

$\sigma = L^0_{v^2}$; $K_1 = L^0_{v^3}$;

$\sigma_u = L^0_{u v^2}$; $K_{1u} = L^0_{u v^3}$;

$\sigma_{u^2} = L^0_{u^2 v^2}$; $K_2 = L^0_{v^4}$;

$M_i = L^0_{u^i} - v_0 L^0_{u^i v}$, $M'_i = L^0_{u^i}$, $i = 1, 2, 3$;

$D = L^0_{v^4}$;

$S_u = M_1 - L^0_{tv}$;

$$S_{tu} = v_0 M_2 + L^0_{tu} - L^0_{t^2 v} - 2v_0 L^0_{tuv} \ ;$$

$$S_{2u} = M_2 - L^0_{tuv} \ ;$$

$$S_{2tu} = v_0^2 M_3 + L^0_{t^2 u} + 2v_0 L^0_{tu^2} - L^0_{t^3 v} - 3v_0 L^0_{t^2 uv} - 3v_0^2 L^0_{tu^2 v} \ ;$$

$$S_{t2u} = v_0 M_3 + L^0_{tu^2} - L^0_{t^2 uv} - 2v_0 L^0_{tu^2 v} \ ;$$

$$S_{3u} = M_3 - L^0_{tu^2 v} \ ;$$

$$S_{t2v} = v_0 \sigma_u + L^0_{tv^2} \ ;$$

$$S_{3tu} = v_0^3 D + L^0_{t^3 u} + 3v_0 L^0_{t^2 u^2} + 3v_0^2 L^0_{tu^3} \ ;$$

$$S_{2t2u} = v_0^2 D + L^0_{t^2 u^2} + 2v_0 L^0_{tu^3} \ ;$$

$$S_{t3u} = v_0 D + L^0_{tu^3} \ ;$$

$$S_{t3v} = v_0 K_{1u} + L^0_{tv^3} \ ;$$

$$S_{2t2v} = v_0^2 \sigma_{u^2} + L^0_{t^2 v^2} + 2v_0 L^0_{tuv^2} \ ;$$

$$S_{tu2v} = v_0 \sigma_{u^2} + L^0_{tuv^2} \ .$$